УДК 517.911

© **Д. М. Кинзебулатов**

СВОЙСТВО ВЫЖИВАЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

§ 1. Свойство выживаемости для обыкновенных дифференциальных уравнений с обычной правой частью

Пусть $I\subset\mathbb{R}$ — открытый интервал, $G\subset\mathbb{R}^n$ открыто, $M\subset G$ замкнуто, $\Omega=(t_0,T)\subset I$ — открытый интервал, функция $f: I\times G\to\mathbb{R}^n$ непрерывна по t и липшицева по x. Как известно [1-3], решение $x(\cdot)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1}$$

такое, что $x(t_0)\in M$ и $x(t)\in M$ для всех $t\in\Omega$ называется (*глобально*) *выживающим в* M (на Ω). Если любое решение $x(\cdot)$ этого уравнения при условии $x(t_0)\in M$ является выживающим в M (на Ω), то говорят, что M обладает *свойством* (*глобальной*) *выживаемости* (на Ω) для (1).

Для управляемой системы

$$\dot{x}=f(t,x,v),\quad x(t_0)=x_0,\quad v\in\mathcal{V} \tag{2}$$

свойство выживаемости тесно связано с *задачей избежания столкновений с множеством* $\mathbb{R}^n\setminus M$ (см. [2, 3]), то есть задачей нахождения управления $v^*\in\mathcal{V}$ такого, что при $v=v^*$ решение (2) выживает в M на $\Omega^*=(t_0,T^*)$, где T^* — наибольшее.

Вопрос о выживаемости для (1) на Ω решается нижеследующей теоремой М. Нагумо [4]: Пусть $\eta_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы ($1\leqslant i\leqslant m$), определим

$$M=\{x:\eta_i(x)\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant m\},\quad L_x=\{i:\eta_i(x)=0\}\subset\{1,\dots,m\}.$$

Пусть система $\{\dot{\eta}_i(x)\}_{i\in L_x}\subset\mathbb{R}^n$ линейно-независима для каждого $x\in\partial M$. Если

$$(\dot{\eta}_i(x),f(t,x))\leqslant 0\quad(i\in L_x)$$

для всех $t\in\Omega$, $x\in\partial M$, то M обладает свойством выживаемости для (1) на Ω.

§ 2. Свойство выживаемости для обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенными функциями

В [5] было введено пространство $\mathcal{T}'$ *обобщенных функций с динамическими основными функциями*, допускающими умножение на разрывные функции. Пусть $\mathcal{T}^{n\prime}$ — пространство n-значных обобщенных функций, $\mathbb{C}^n$ — пространство ограниченных непрерывных n-значных функций.

Рассмотрим в $\mathcal{T}^{n\prime}$ обыкновенное дифференциальное уравнение с обобщенными функциями

$$\dot{x}=f(t,x)+g(t,x)v, \tag{3}$$

где $f: I\times G\to\mathbb{R}^n$, $g: I\times G\to\mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывны по t и липшицевы по x, обобщенная функция

$$v=w+\sum_{k=1}^{\infty}\langle c_k,\delta_{\tau_k}^{\alpha_k}\rangle,$$

где функция $w\in\mathbb{C}^n(\bar{I})$, $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}\subset I$, $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|<\infty$, $\delta_{\tau_k}^{\alpha_k}\in\mathcal{T}^{n\prime}$ — дельта-функция, $\alpha_k\in\mathbb{C}^n(J)$ — *форма* дельта-функции (см. [5]), $J\doteq[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\langle,\rangle$ — покомпонентное произведение векторов. Решением (3) называется *динамическая функция* x — отображение

$I \ni t \to x(t)(\cdot)$, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям [5, 6]. Если $x(t)(\cdot) \equiv \mathrm{const}$ для всех $t \in I$, то отображение называется *обычной функцией*.

Решение начальной задачи (3), $x(t_0-) = x_0$, существует и единственно в $\mathcal{T}^{n\prime}$.

Если $c_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), то x является обычной (абсолютно-непрерывной) функцией–решением уравнения с обычной правой частью. В [6] показано, что $x(t)(\cdot) \neq \mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда $t = \tau_k$ ($k \in \mathbb{N}$) и $c_k \neq 0$, то есть $x(\tau_k)(\cdot)$ описывает траекторию в точке τ_k сосредоточения дельта-функции.

О п р е д е л е н и е 1. Назовем решение x уравнения (3) такое, что $x(t_0-) \in M$ и $x(t)(s) \in M$ для всех $t \in \Omega \cup \{t_0\}$, $s \in J$, *(глобально) выживающим* (на Ω). Скажем, что M обладает *свойством (глобальной) выживаемости* (на Ω) для (3), если любое решение x, где $x(t_0-) \in M$, является выживающим в M (на Ω).

Т е о р е м а 1 ([6]). *Пусть система $\{\dot{\eta}_i(x)\}_{i \in L_x} \subset \mathbb{R}^n$ линейно-независима для каждого $x \in \partial M$. Если выполнено неравенство*

$$\big(\dot{\eta}_i(x), f(t,x) + g(t,x)v\big) \leqslant 0 \quad (i \in L_x)$$

в $\mathcal{T}'$ для всех $t \in \Omega$, $x \in \partial M$, то M обладает свойством выживаемости для (3) *на Ω.*

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)v, \quad x(t_0-) = x_0, \quad v \in \mathcal{V} \subset \mathcal{T}^{m\prime} \tag{4}$$

Задачу нахождения $v^* \in \mathcal{V}$ такого, что соответствующее решение (4) выживает в M на $\Omega^* = (t_0, T^*)$, где T^* — наибольшее, назовем *импульсной задачей избежания столкновений.*

П р и м е р 1 ([6]). Пусть $I = (-1, \infty)$, $G = I \times \mathbb{R}^n$. Пусть $\eta(x) = x^2 - 1$, то есть $M = [-1, 1]$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x - v, \quad x(0-) = 1, \quad v \in \mathcal{V} \doteq \left\{ v \in \mathcal{T}' \ : \ v \geqslant 0, \ \int_0^1 v dt \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

Тогда импульсная задача избежания столкновений имеет решения

$$v^* = \frac{1}{2}\delta_0^{\alpha^*}, \quad \alpha^* \geqslant 0,$$

решение в обычных управлениях не существует.

Список литературы

1. J. P. Aubin, A. Cellina. Differential inclusions: set-valued maps and viablity theory. Springer-Verlag, 1984. 342 c.
2. A. Z. Fazylov. Sufficient conditions for optimality of a survival problem // J. Appl. Math. Mech. 1997. №3. T. 61. C. 519–521.
3. В. Н. Баранов. Построение оптимального синтеза в задаче долгодействия // Вестн. Удмуртского ун-та. 2005. Т. 1. С. 3–14.
4. M. Nagumo. Uber die Lage der Integralkurven gewohnliker Differentialgleichungen // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1942. №24. C. 551-559.
5. V. Derr, D. Kinzebulatov. Distributions with dynamic test functions and multiplication by discontinuous functions // Preprint, arXiv, 2006.
6. D. Kinzebulatov. Systems with distributions and viability theorem // Preprint, arXiv, 2006.

Кинзебулатов Дамир Маратович
Ижевский государственный
технический ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: dkinz@member.ams.org